

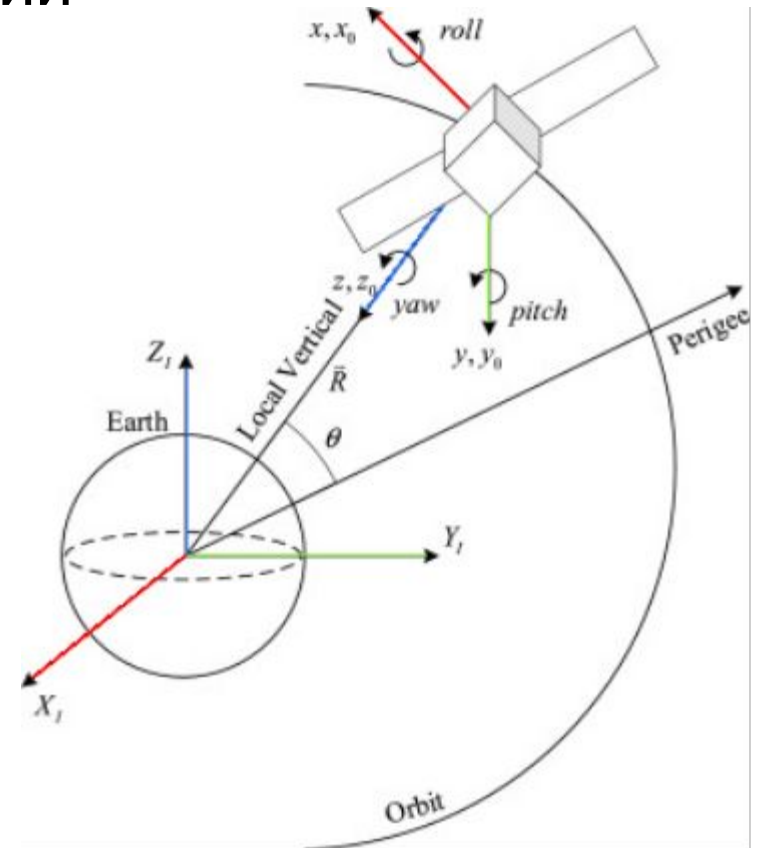
Алгоритм вычисления ориентации спутника в свободном полете

Computer Assisted Mathematics 2025
July 15–17, 2025

Мощенок Е. А.

Задача вычисления ориентации

Создание точных и быстрых алгоритмов определения ориентации космических аппаратов и уменьшение вычислительных ошибок является востребованной задачей в системах управления движением и ориентации. Современные миссии работают все дальше от Земли, и задержки связи требуют полной автономности. При этом научные задачи, например астрономические наблюдения или посадки на малые тела, требуют крайне высокой точности наведения. Задача ориентации связана с задачей нахождения угловой скорости



Астроинерциальная навигационная система



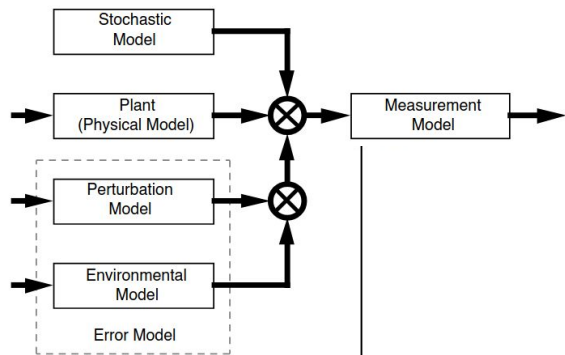
Упрощенная структурная схема АИНС. Г. А. Аванесов и Р. В. Бессонов и Н. Н. Брысин и [и др.]. "Астроинерциальная навигационная система". В: Механика, управление и информатика (см. в книгах) 7.2(55) (2015), с. 21—37

Ошибки гироскопов

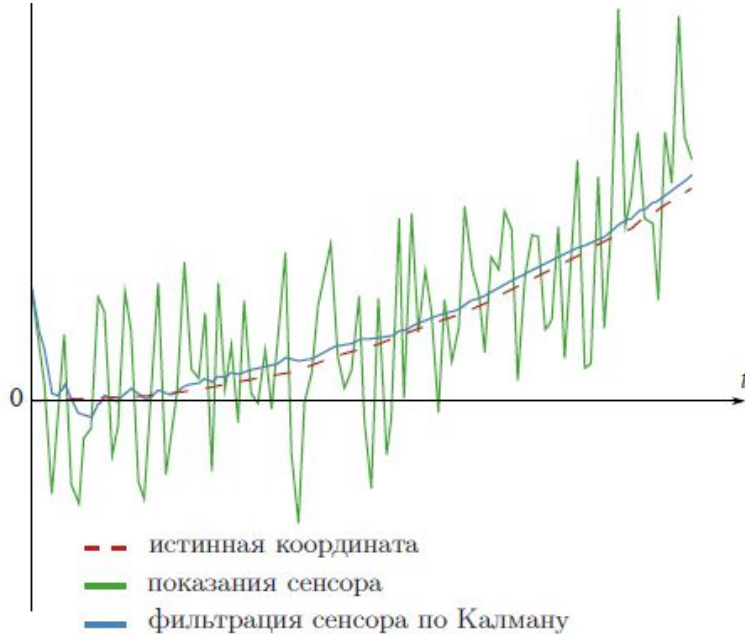
Из стандарта IEEE Std 952-1997 можно выделить несколько основных факторов влияющих на ошибку результата для лазерного гироскопа.

1. Предельные значения измерения.
2. Ошибка масштабирования.
 - a. Нелинейность. Проявляется в изменении чувствительности гироскопа в зависимости от величины угловой скорости.
 - b. Асимметрия. Различие коэффициентов масштабирования между положительным и отрицательным входом.
 - c. Повторяемость. Изменение коэффициента между периодами эксплуатации.
3. Случайные ошибки.
 - a. Дрейф угла (Angle Random Walk). Представляет собой случайную добавочную компоненту белого шума. Для лазерного гироскопа источником шума является спонтанное излучение фотонов. Измеряется в $^{\circ}/\sqrt{ч}$
 - b. Нестабильность смещения нуля (Bias Instability). Шум, возникающий в электронных компонентах датчика, подверженных случайному мерцанию. Измеряется в $^{\circ}/ч$
 - c. Дрейф скорости (Rate Random Walk). Это случайный процесс неопределенного происхождения. Измеряется в $^{\circ}/\sqrt{ч}^{(3/2)}$
 - d. Мультипликативная систематическая погрешность (Rate Ramp). Систематическая погрешность представляет собой отклонение показаний датчика, сохраняющееся в течение длительного периода времени.
4. Шум квантования (Quantization Noise). Данный тип шума обусловлен дискретной природой датчика. Для лазерного гироскопа электроника регистрирует сигнал только тогда, когда фаза гироскопа изменяется на заданную величину.
5. Температурные ошибки. Ошибки, обусловленные внешними факторами.

Вычисление ориентации по датчикам



Модель системы гироскопа. IEEE Std 952-1997



gx	gy	gz	ts_sensor	inv_1	inv_2
...					
-22.81	-0.43	-2.64	909418	0.071016	0.815298
-22.83	0.06	-2.62	909428	0.071068	0.816479
-22.83	0.56	-2.67	909438	0.071091	0.817016



Уравнения Эйлера

Свободное вращение тела с проекциями p , q , r угловой скорости ω на главные оси инерции i , j , k и главными моментами инерции A , B , C описывается уравнениями Эйлера.

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{(C-B)}{A}qr, \\ \dot{q} &= -\frac{(A-C)}{B}rp, \\ \dot{r} &= -\frac{(B-A)}{C}pq. \end{aligned} \right\} \text{Уравнения Эйлера}$$

Решение этой системы дифференциальных нелинейных уравнений позволяет по заданным начальным данным p_0 , q_0 , r_0 найти угловую скорость в момент времени t .

Численное решение

В случае численного решения к уравнениям Эйлера, находящим угловую скорость, добавляется кинематическое уравнение, необходимое для поиска ориентации.

Выбрана форма представления ориентации в виде кватерниона поворота. Для решения данной системы уравнений необходимо задать начальные проекции угловой скорости p_0 , q_0 , r_0 на оси подвижной системы и начальный кватернион поворота Q , например $Q = [1, 0, 0, 0]$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = -\frac{(C - B)}{A} qr, \\ \dot{q} = -\frac{(A - C)}{B} rp, \\ \dot{r} = -\frac{(B - A)}{C} pq, \\ \dot{Q}_0 = -0.5(Q_1p + Q_2q + Q_3r), \\ \dot{Q}_1 = 0.5(Q_0p - Q_3q + Q_2r), \\ \dot{Q}_2 = 0.5(Q_0q - Q_1r + Q_3p), \\ \dot{Q}_3 = 0.5(Q_0r - Q_2p + Q_1q). \end{array} \right.$$

Численное решение

Для численного решения системы выбран явный метод Рунге--Кутты. Для дифференциального уравнения вида $\dot{y} = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

приближенное значение в точке $n+1$ вычисляется по формуле $y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s b_i k_i$,

где y_n -- значение в предыдущей точке,

h -- величина шага сетки по x ,

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + a_{21} h k_1),$$

...

$$k_s = f(x_n + c_s h, y_n + \sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j} h k_j).$$

Конкретный метод определяется числом s и коэффициентами b_i , $a_{i,j}$, c_i

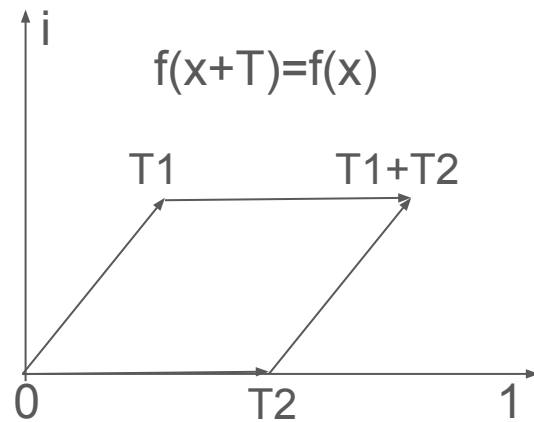
Вычисление ориентации по точному решению.

Новый алгоритм основан на точном решении[1] уравнений Эйлера. Угловая скорость вычисляется как эллиптическая функция, что позволяет найти ее периоды. Для работы необходимо знать только угловую скорость в какой-то момент времени и момент инерции.

$$S := \begin{pmatrix} \alpha_0 \cos \psi - \alpha_1 \sin \psi & \alpha_0 \sin \psi + \alpha_1 \cos \psi & Ap/m \\ \beta_0 \cos \psi - \beta_1 \sin \psi & \beta_0 \sin \psi + \beta_1 \cos \psi & Bq/m \\ \gamma_0 \cos \psi - \gamma_1 \sin \psi & \gamma_0 \sin \psi + \gamma_1 \cos \psi & Cr/m \end{pmatrix},$$

$$\psi = \psi(t) := \frac{ht}{m} + \left(\frac{h}{m} - \frac{m}{A}\right) \left(\frac{h}{m} - \frac{m}{B}\right) \left(\frac{h}{m} - \frac{m}{C}\right) \int_0^t \frac{dt}{\omega^2 - h^2/m^2}$$

$$f(t, A, B, C) := \sqrt{\frac{BC}{(A-B)(A-C)}} iS \left(t, \sqrt{\frac{(A-B)(m^2 - Ch)}{ABC}}, \sqrt{\frac{(A-C)(m^2 - Bh)}{ABC}} \right)$$



$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Наборы данных для сравнение алгоритмов.

Тестирование и сравнение методов нахождения ориентации тела происходило на двух выборках данных.

1. Экспериментальных данных, полученных в работе [2].
2. Данных телеметрии наноспутника из работы [3].

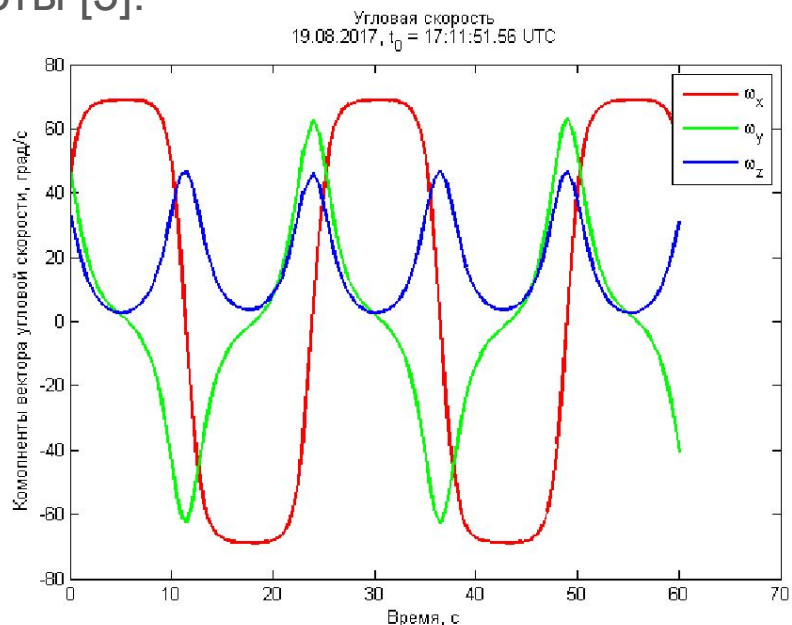
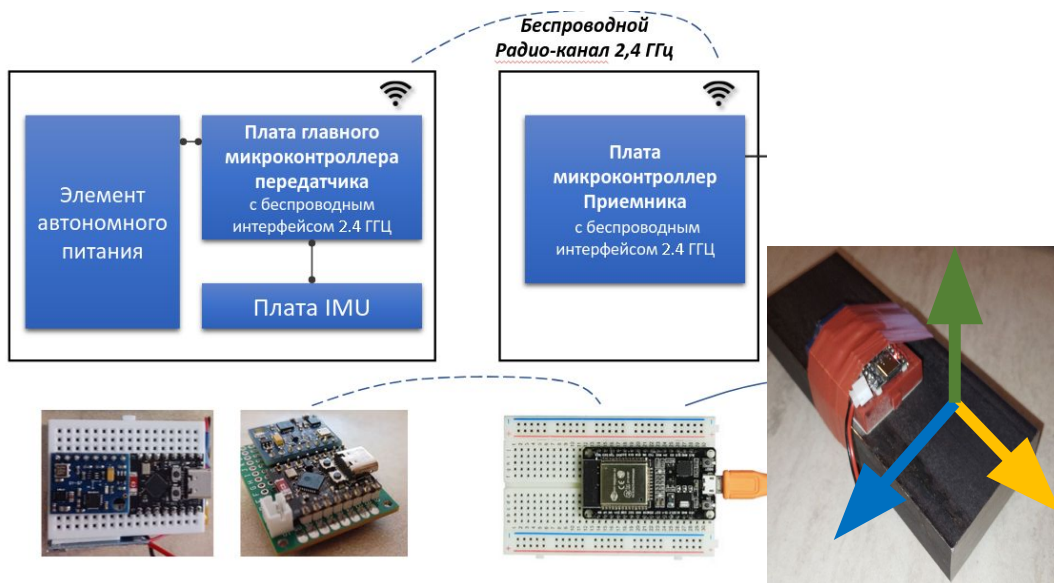


Рис. 10. Компоненты угловой скорости в зависимости от времени

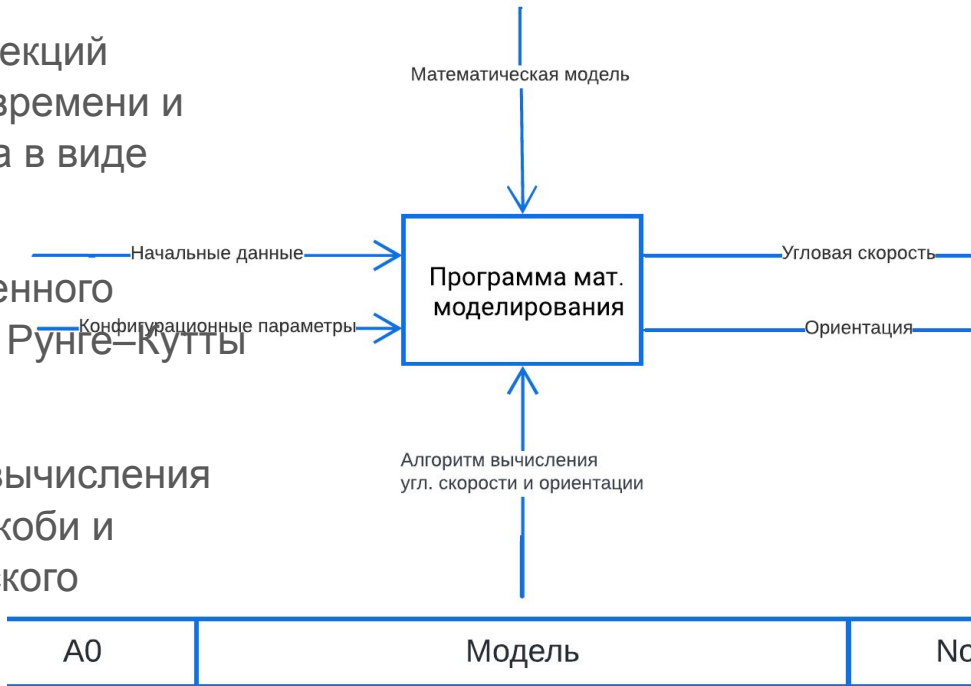
Программная реализация

1. **numpy** – хранение проекций угловой скорости, меток времени и наборов матриц перехода в виде многомерных массивов.

2. **scipy** – алгоритм численного решения явным методом Рунге–Кутты 8 порядка,

3. **mpmath** – алгоритмы вычисления эллиптического синуса Якоби и арифметико-геометрического среднего,

4. **matplotlib** – создание графиков.



Вычисление полупериодов

$$T(A, B, C) := \frac{\pi\sqrt{ABC}}{2M\left(\sqrt{(A-B)(m^2-Ch)}, \sqrt{(A-C)(m^2-Bh)}\right)},$$

```
def lc(rb, order):
    I, _, m2, h = rb.get_attrs()
    a, b, c = I[order]
    return ((a - b) * (m2 - c * h) / (a *
b * c))**0.5
```

```
def half_period(rb, order):
    return mpm.pi / (2 * mpm.agm(
        lc(rb, order=order),
        lc(rb, order=order[get_order('ACB')])
    ))
```

```
def half_periods(rb):
    periods = [
        half_period(rb, get_order('ABC')),
        half_period(rb, get_order('BCA')),
        half_period(rb, get_order('CAB'))
    ]
    T_im = None
    T_rl = None
    for i in periods:
        if i.imag == 0:
            T_rl = i
        if i.real == 0:
            T_im = i
    return T_rl, T_im
```

Вычисление угловой скорости на периоде

$$f(t, A, B, C) := \sqrt{\frac{BC}{(A-B)(A-C)}} iS\left(t, \sqrt{\frac{(A-B)(m^2 - Ch)}{ABC}}, \sqrt{\frac{(A-C)(m^2 - Bh)}{ABC}}\right)$$

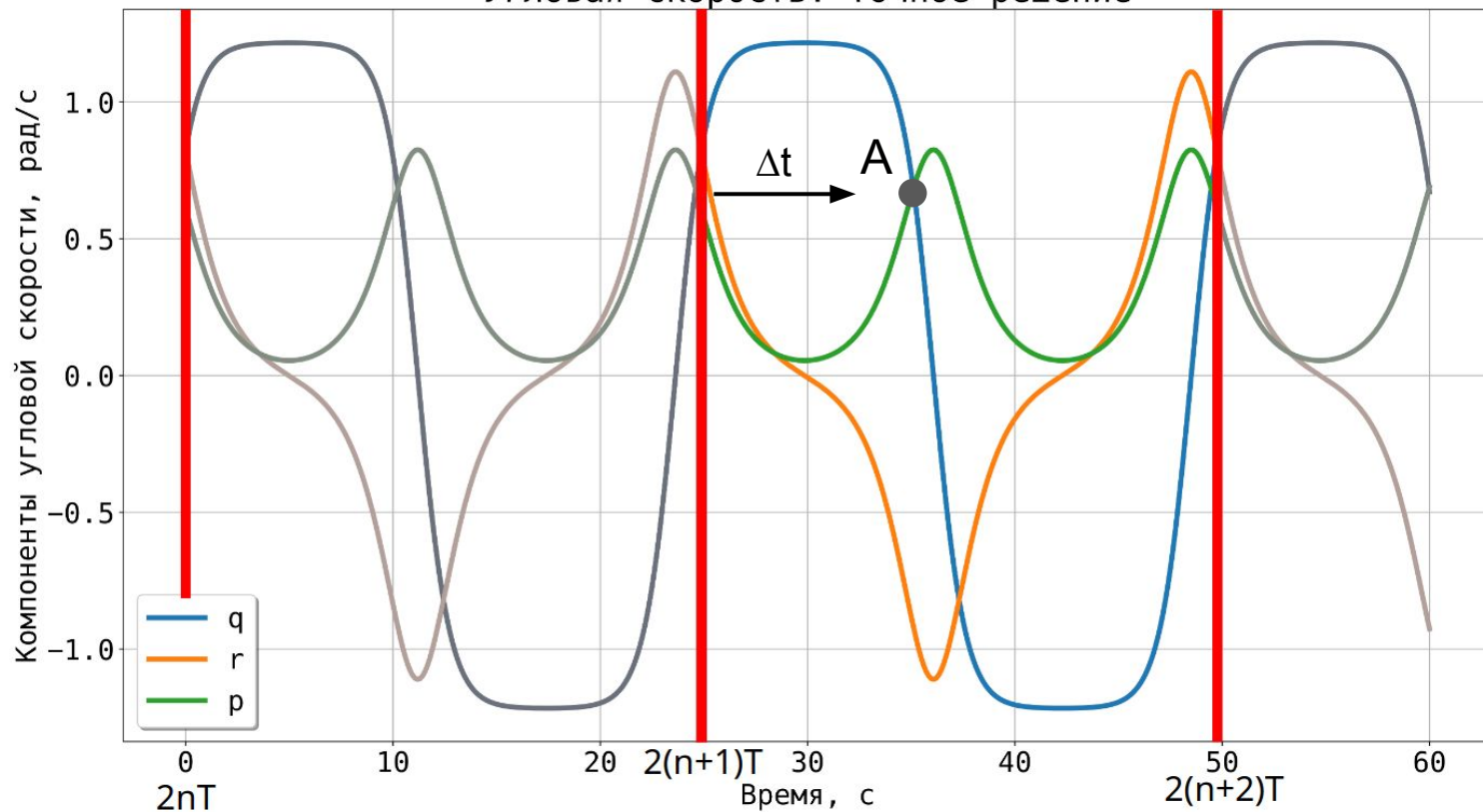
$$S(t, k) = \sqrt{k} \operatorname{sn}(t/\sqrt{k}, k),$$

ang_velocity_element(t, rb, order, complex_=False) – вычисляет проекции p, q, r угловой скорости ω по формуле выше.

instant_ang_velocity(t, rb, complex_=False) – угловая скорость ω в момент времени t.

Вычисление угловой скорости на всем отрезке времени

Угловая скорость. Точное решение



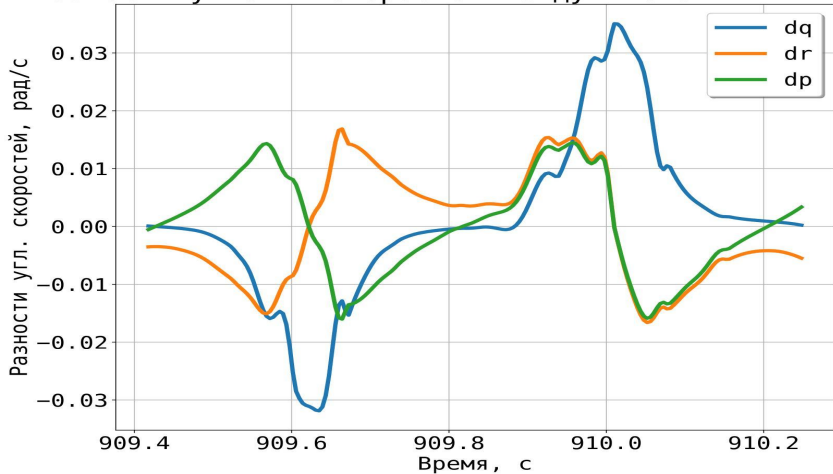
Вычисление ориентации

Нахождение периода позволяет считать значение интеграла только на периоде вместо всего участка времени.

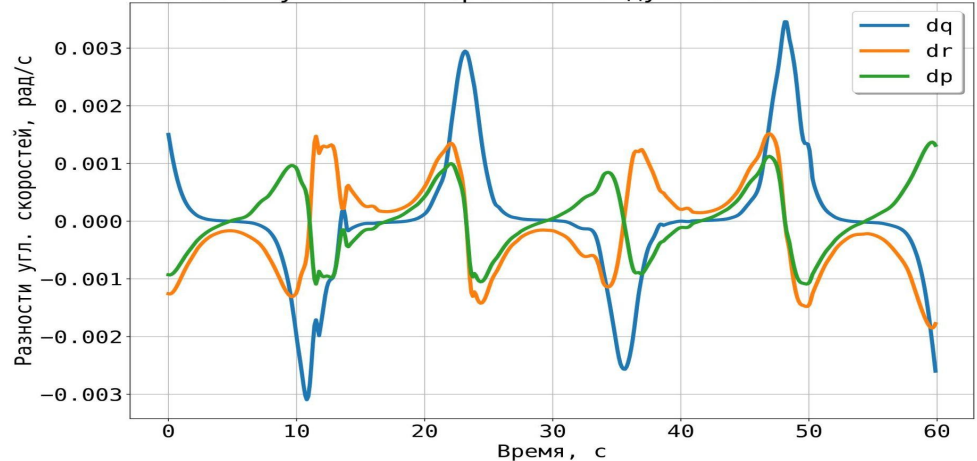
$$S := \begin{pmatrix} \alpha_0 \cos \psi - \alpha_1 \sin \psi & \alpha_0 \sin \psi + \alpha_1 \cos \psi & Ap/m \\ \beta_0 \cos \psi - \beta_1 \sin \psi & \beta_0 \sin \psi + \beta_1 \cos \psi & Bq/m \\ \gamma_0 \cos \psi - \gamma_1 \sin \psi & \gamma_0 \sin \psi + \gamma_1 \cos \psi & Cr/m \end{pmatrix},$$

$$\psi = \psi(t) := \frac{ht}{m} + \left(\frac{h}{m} - \frac{m}{A}\right) \left(\frac{h}{m} - \frac{m}{B}\right) \left(\frac{h}{m} - \frac{m}{C}\right) \int_0^t \frac{dt}{\omega^2 - h^2/m^2}$$

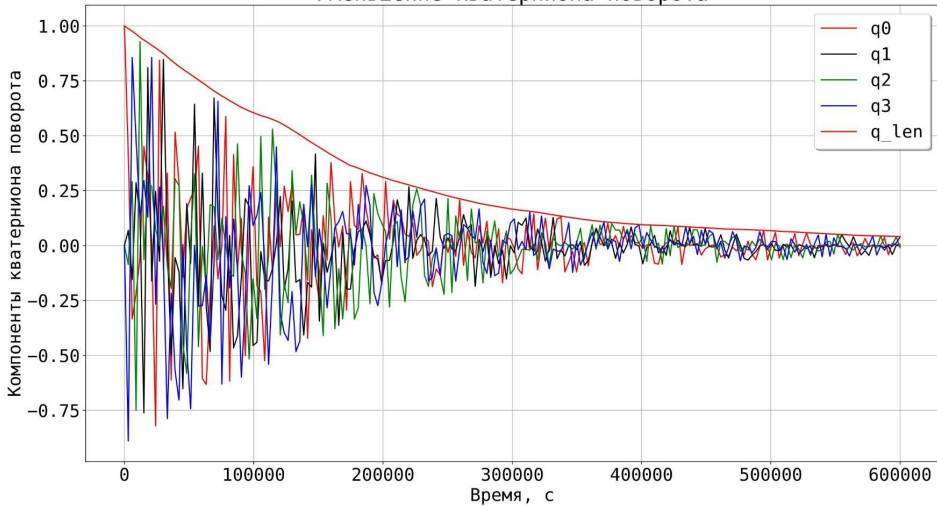
Разность угловых скоростей между численным и точным



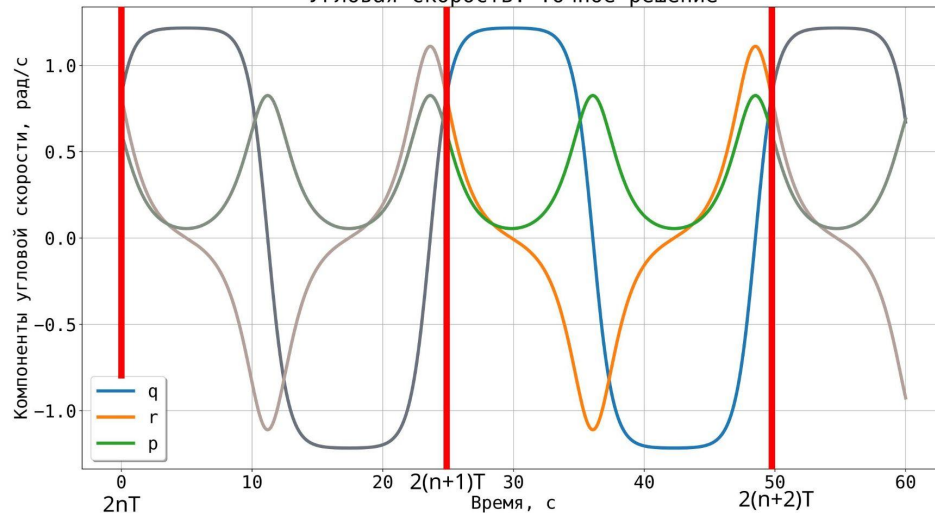
Разность угловых скоростей между численным и точным



Уменьшение кватерниона поворота



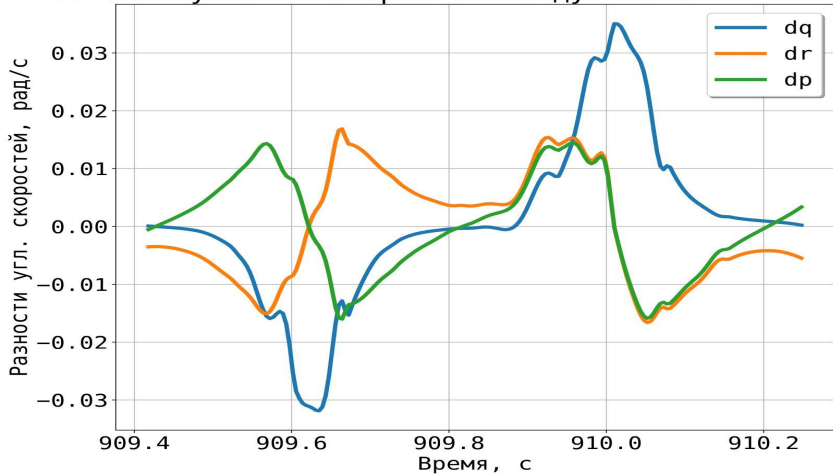
Угловая скорость. Точное решение



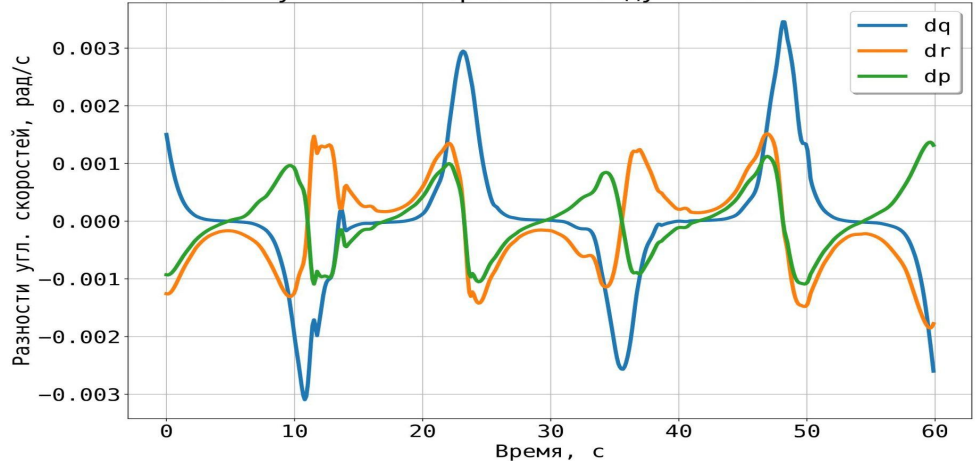
Время выполнения на большом интервале времени.

Интервал времени $t = [t_0, t_n]$	$t = [0, 60]$	$t = [0, 6 \cdot 10^5]$	$t = [0, 6 \cdot 10^6]$	$t = [0, 6 \cdot 10^7]$
Нахождение угловой скорости численным алгоритмом 2 порядка	–	–	25с	1м 3с
Нахождение ориентации в последней точке t_n численным алгоритмом 2 порядка	–	–	28с	1м 14с
Нахождение угловой скорости численным алгоритмом 8 порядка	0.92с	43с	–	–
Нахождение ориентации в последней точке t_n численным алгоритмом 8 порядка	1.7с	45с	–	–
Нахождение угловой скорости точным алгоритмом	1с	7.5с	32с	2м 11с
Нахождение ориентации в последней точке t_n точным алгоритмом	1.8с	9.5с	34.7с	2м 7с

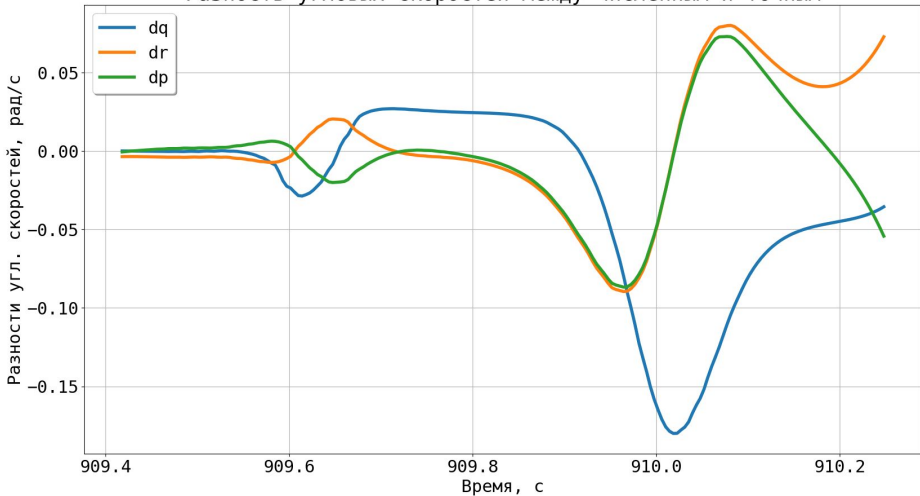
Разность угловых скоростей между численным и точным



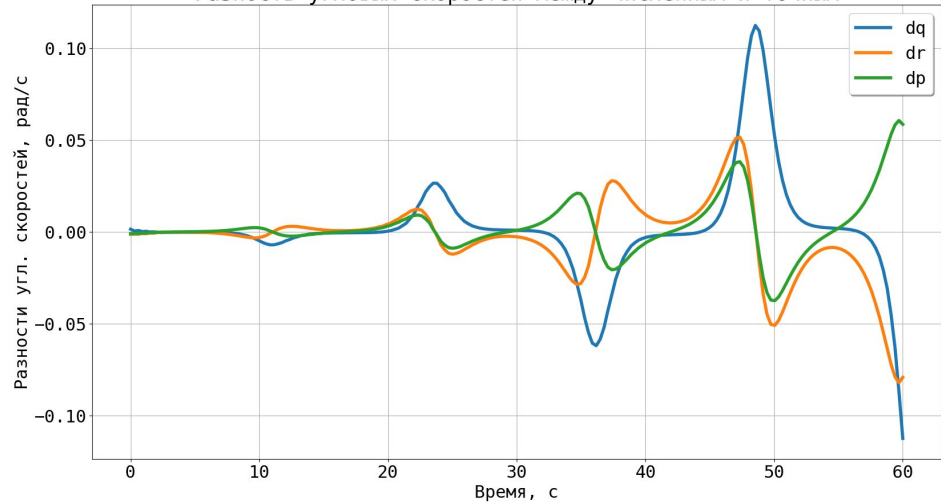
Разность угловых скоростей между численным и точным



Разность угловых скоростей между численным и точным



Разность угловых скоростей между численным и точным



Ссылки

[1] S. Adlaj, An exact calculation of orientation of a freely rotating rigid body, available at semjonadlaj.com/SP/ExactFreeRotation.pdf

[2] Н. П. Копытов и Е. А. Митюшов. Использование беспроводных датчиков для мониторинга вращательного движения «свободного полёта» твёрдого тела. Семинар «Алгебраические методы Теоретической механики» им. В. В. Шевченко. www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=43777

[3] Д.С. Иванов, и М.Ю. Овчинников, и О.А. Панцырный, и А.С. Селиванов, и И.О. Федоров, и О.Е. Хромов, and Н.А. Юданов. Угловое движение наноспутника ТНС-0 №2. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-126

Код программы вычисления точным методом. Приложение А. <https://semjonadlaj.com/AMTM/20250606.pdf>