



Оценка космологических параметров по данным сверхновых типа Ia с помощью Mathematica

В.Р. Крым

СПбГУ, каф. высшей геометрии

16.07.2025

Оценка космологических параметров, таких, как плотность вещества, плотность темной энергии (космологической постоянной) и кривизна, является нелинейной регрессионной задачей, которую можно решить с помощью Mathematica.

The task of evaluation the cosmological parameters such as the matter density, the dark energy density and the curvature is a non-linear regression problem which can be solved with Mathematica.

Victor Krym, St. Petersburg State University
v.krym@spbu.ru

Введение

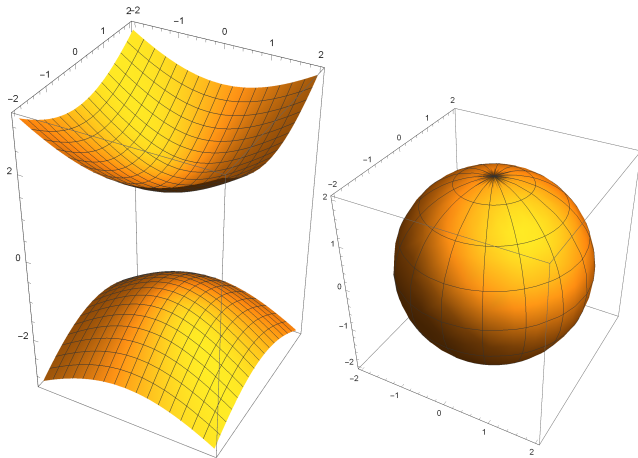


Рис. 1: Гиперboloид (времениподобная сфера в пространстве Минковского) и сфера (S^2 в R^3).

Вселенная однородна и изотропна (основной космологический принцип). Собственная анизотропия реликтового микроволнового излучения имеет порядок $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$.

Флуктуации плотности галактик в пределах 12 млрд. световых лет составляют $\frac{\Delta \rho}{\rho} \lesssim 10^{-4}$. Поэтому можно предположить, что наблюдаемое нами трёхмерное пространство является *пространством постоянной кривизны*, в котором секционные кривизны в различных двумерных направлениях постоянны. Тогда это одно из трёх пространств:

- Пространство положительной кривизны – 3-сфера S^3 .
- Пространство нулевой кривизны – плоское пространство \mathbb{R}^3 .
- Пространство отрицательной кривизны – гиперболическая 3-сфера.

Метрика

Метрика пространства-времени будет иметь вид (метрика Фридмана—Робертсона—Уокера):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right)$$

в космическом времени t или

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left(d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right),$$

где η – конформное время. Это псевдориманово многообразие с лоренцевой метрикой сигнатуры $(+, -, -, -)$, “множество событий”.

Уравнения Фридмана

$$\begin{cases} G_0^0 = \frac{3\kappa}{a^2} + \frac{3a'^2}{c^2 a^2} = \kappa\rho + \Lambda \\ G_1^1 = G_2^2 = G_3^3 = \frac{\kappa}{a^2} + \frac{a'^2}{c^2 a^2} + \frac{2a''}{c^2 a} = -\kappa P + \Lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a'^2}{c^2 a^2} = \frac{\kappa}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{a''}{c^2 a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \end{cases}$$

Критическая плотность материи $\rho_c = \frac{3H_0^2}{\kappa c^2} = \frac{3H_0^2}{8\pi G_N}$. Тогда

$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = H_0^2 \frac{\rho}{\rho_c} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{\kappa c^2}{a^2}$. Перейдем к *относительным параметрам*

$$\Omega_m = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \quad \text{и} \quad \Omega_\kappa = -\frac{\kappa c^2}{H_0^2 a^2}.$$

Тогда уравнение Фридмана примет вид

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = H^2 = H_0^2 \left(\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa\right),$$

$$\Omega_{0m} + \Omega_\Lambda + \Omega_{0\kappa} = 1.$$

Решение

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \frac{da}{a \sqrt{\Omega_{0m} (a/a_0)^{-3\gamma} + \Omega_\Lambda + \Omega_{0\kappa} (a_0/a)^2}}.$$

Для плоского пространства ($\kappa = 0$)

$$t = \frac{2}{3\gamma H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{a^{3\gamma} \Omega_\Lambda}{a_0^{3\gamma} (1 - \Omega_\Lambda)}}.$$

В настоящий момент времени получаем

$$t_0 = \frac{2}{3\gamma H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda}} = \frac{2}{3\gamma H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{arth} \sqrt{\Omega_\Lambda}.$$

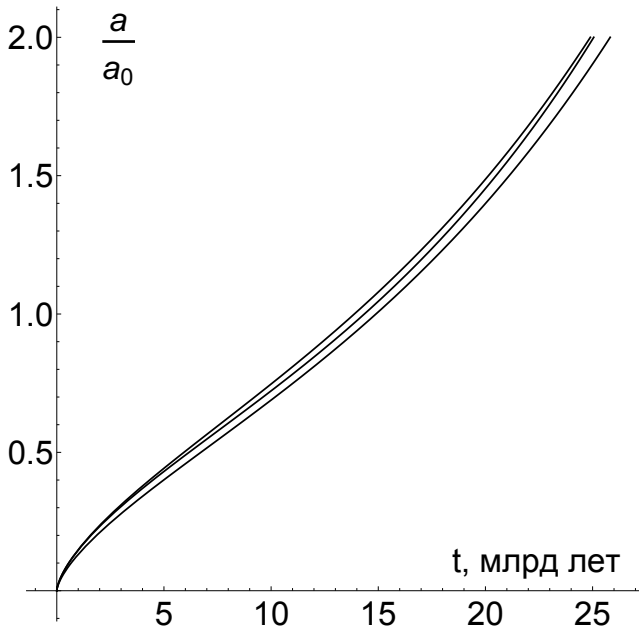
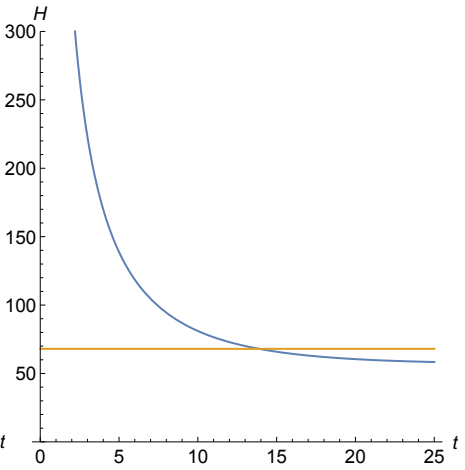
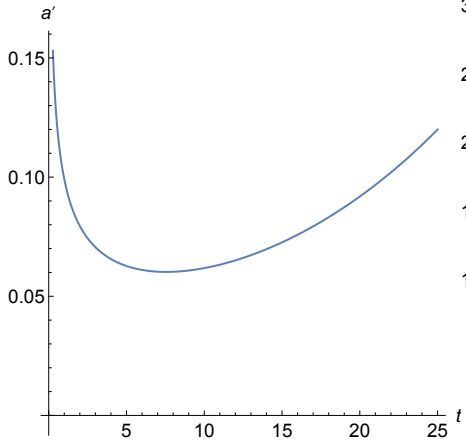


Рис. 2: Масштабный множитель.



Фотометрическое расстояние

Расстояние до объекта в космологии можно оценивать с помощью красного смещения z , $\frac{a_0}{a} = 1 + z$, и как

фотометрическое расстояние d_L . Если источник имеет абсолютную светимость \mathcal{L} , то его наблюдаемый поток

$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{L}}{4\pi d_L^2}$. Если сфера в момент испускания фотона имела радиус r , то в

настоящий момент времени его надо умножить на a_0 . Теперь учтем потерю энергии фотона. Один множитель $(1 + z)$ возникает из-за потери энергии фотонами в силу красного смещения, а второй множитель $(1 + z)$ возникает из-за того, что два фотона, разделенные промежутком времени Δt во время испускания, будут разделены промежутком времени Δt_0 во время регистрации, где $c\Delta t_0/a_0 = c\Delta t/a$. Величина Δt пропорциональна расстоянию между фотонами, поэтому [1]

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{a_0}{a} = 1 + z \quad \text{и} \quad \mathcal{F} = \frac{\mathcal{L}}{4\pi(1+z)^2 a_0^2 r^2}.$$

Следовательно, фотометрическое расстояние

$$d_L = (1 + z)a_0 r.$$

Определим χ -координату $d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2}$, $\kappa = \pm 1$. Тогда $\chi = \arcsin r$, если $\kappa = 1$, и $\chi = \operatorname{asinh} r$, если $\kappa = -1$. Поэтому $r = \sin_{\kappa} \chi$, где

$$\sin_{\kappa} \chi = \begin{cases} \sin \chi, & \kappa = 1, \\ \chi, & \kappa = 0, \\ \sinh \chi, & \kappa = -1. \end{cases}$$

Метрика принимает вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(d\chi^2 + \sin_{\kappa}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right).$$

Для фотона $\Delta\chi = \int_{t_e}^{t_0} c \frac{dt}{a} =$

$$= \int_{a_e}^{a_0} c \frac{da}{a'a} = \int_{a_e}^{a_0} \frac{c da}{a^2 H} = -\frac{1}{a_0} \int_{a_e}^{a_0} c \frac{d(a_0/a)}{H} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)},$$

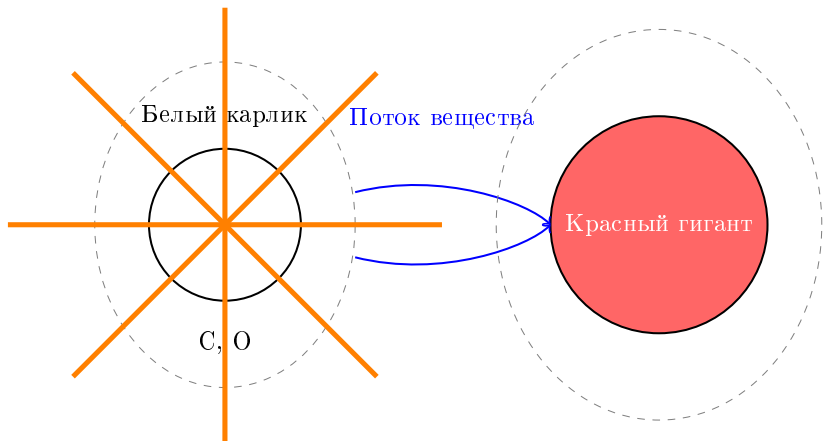
В силу $\Omega_{0\kappa} = -\frac{\kappa c^2}{H_0^2 a_0^2}$ получаем $a_0 = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_{0\kappa}|}}$ для $\kappa = \pm 1$.

Итак, фотометрическое расстояние

$$d_L = (1+z) \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_{0\kappa}|}} \sin_\kappa \left(\sqrt{|\Omega_{0\kappa}|} \int_0^z \frac{dz_1}{E(z_1)} \right),$$

где $E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$. Если $\kappa = 0$, то $\sin_\kappa \chi = \chi$ и $\sqrt{|\Omega_{0\kappa}|}$ сокращается. Обычно используют *модуль расстояния* $\mu = 5 \log_{10}(d_L/10\text{pc})$, в этой формуле d_L в парсеках.

Сверхновая Ia



Двойная система: белый карлик + красный гигант
формирование сверхновой Ia

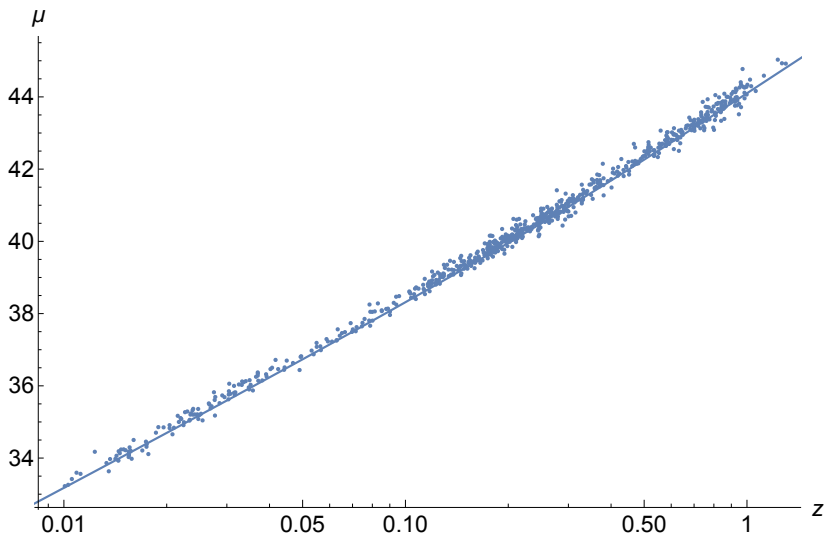


Рис. 3: Диаграмма Хаббла. Данные М. Betoule [2].

<http://cdsarc.u-strasbg.fr/ftp/J/A+A/568/A22/>

Варианты функции $H(z)$

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{0m} (1+z)^{3\gamma} + \Omega_\Lambda + \Omega_{0\kappa} (1+z)^2}$$

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{0r} (1+z)^4 + \Omega_{0m} (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{0\kappa} (1+z)^2}$$

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{0m} (1+z)^3 + \Omega_\Lambda (1+z)^{w+1} + \Omega_{0\kappa} (1+z)^2}$$

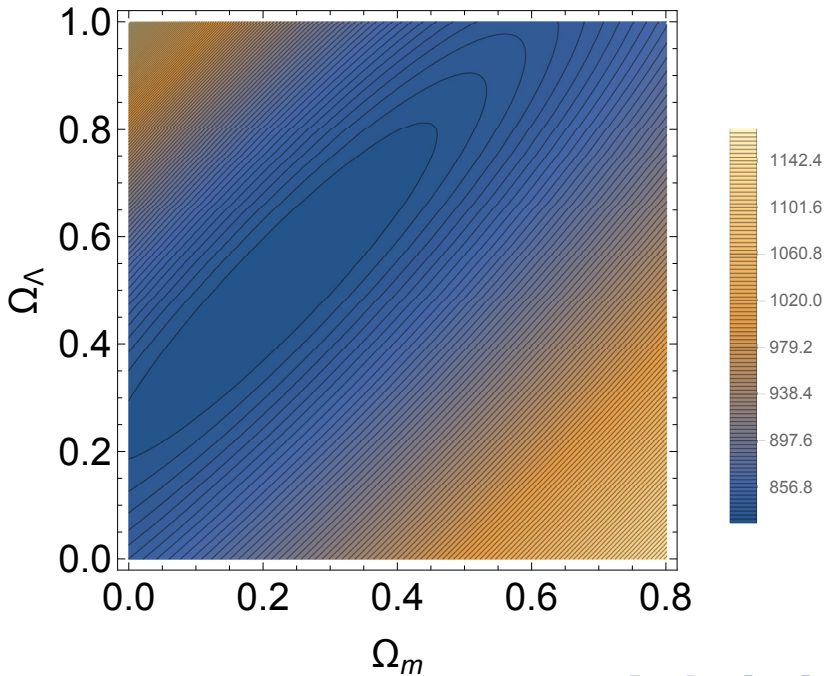
Определение параметров

Формула для фотометрического расстояния ведет к регрессионной задаче для определения параметров модели. Для оценки погрешности параметров модели необходимо использовать χ^2 статистику

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\mu_i - \mu(d_L^{\text{theor}}(z_i, H_0, \Omega_{0m}, \Omega_\Lambda, \gamma)))^2}{\sigma_i^2},$$

где σ_i – дисперсия измеренного фотометрического модуля расстояния μ_i . Более общий вариант этой формулы использует матрицу ковариаций:

$$\chi^2 = \sum_{i,j} \Delta\mu_i (C^{-1})_{ij} \Delta\mu_j.$$



Оценка погрешности определения параметров

Для оценки погрешности необходимо использовать основное свойство распределения χ^2 . Обозначим $\theta = (\Omega_{0m}, \Omega_\Lambda)$ – параметры модели и разложим χ^2 в ряд Тейлора [3]:

$$\chi^2 = \chi^2|_{\theta=\hat{\theta}} + (\hat{\theta} - \theta)^T W^{-1}(\hat{\theta} - \theta).$$

В правой части распределение $\chi^2|_{\theta=\hat{\theta}}$ имеет $N_{\text{SN}} - 2$ степеней свободы, где $N_{\text{SN}} = 740$ – число Сверхновых, а квадратичная форма $\Delta\chi^2 = (\hat{\theta} - \theta)^T W^{-1}(\hat{\theta} - \theta)$ имеет χ^2 -распределение с двумя степенями свободы [3, 4]. Поэтому при построении доверительных контуров следует использовать квантили для доверительных вероятностей с двумя степенями свободы: 2.28 (68%), 6 (95%) и 12.4 (99.8%).

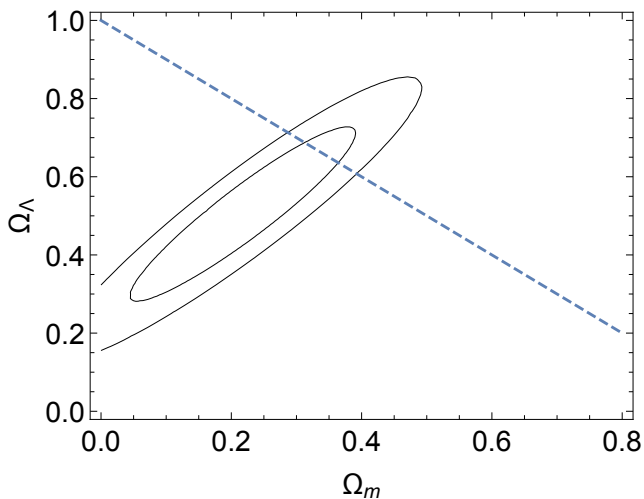


Рис. 5: Параметры модели. Показаны контуры для доверительной вероятности 68% и 95%.

```

EE[z_, Qm_, A_] := Sqrt[Qm * (1 + z)^3 + A + (1 - Qm - A) * (1 + z)^2]
Hinv[z_?NumberQ, Qm_, A_] := NIntegrate[1/EE[z1, Qm, A], {z1, 0, z}, Method -> "Trapezoidal"]

Hinv[0.5, 0.2, 0.71]
0.448678

dL[z_?NumberQ, Qm_, A_, H0_] := Piecewise[{{(1 + z) * c / (Sqrt[1 - Qm - A] * H0) * Sinh[Sqrt[1 - Qm - A] * Hinv[z, Qm, A]], 1 - Qm - A > 0},
  {(1 + z) * c / (Sqrt[-(1 - Qm - A)] * H0) * Sin[Sqrt[-(1 - Qm - A)] * Hinv[z, Qm, A]], 1 - Qm - A < 0},
  {(1 + z) * c / H0 * Hinv[z, Qm, A], 1 - Qm - A == 0}}]

c = 299792.458 (*km/s*)
299792.

dL[1.0, 0.3, 0.62, 68]
6695.93

dm[r_?NumberQ] := 5 * Log[r] / Log[10] + 25; (*standardized distance modulus*)
dm[dL[0.1, 0.3, 0.7, 68]]
38.3781

```

```

(* Supernovae Ia data *)
data = Import["C:\\Maxima\\cosm_acceleration\\Betoule.csv", "CSV", TextDelimiters -> " "];
Dimensions[data]
{740, 19}

data[[1]]
{0.503084, 0.5043, 0, 23.0017, 0.088031, 1.27319, 0.150058, -0.012353, 0.030011,
 9.517, 0.1105, 52909.7, 0.214332, 0.00079, 0.00044, -0.00003, 1, 36.0432100 -4.0374690, 0.001697}

zs = data[[ ; ; , 1]]; (* z in CMB frame *)
zs[[1]]
Min[zs]
Max[zs]
0.503084
0.01006
1.29911

mu0 = data[[ ; ; , 4]]; (* m_B^* luminosity distance *)
mu0[[1]]
Min[mu0]
Max[mu0]
23.0017
14.1484
26.0468

```

```

sigma2 = Table[Cinv[[j, j]], {j, 1, Nstars}];
wmfit = NonlinearModelFit[mzx1Col, dm[dL[z, 0.315, 0.685, 67.3]] + MB - alpha * xx1 + beta * col + If[logMst2 >= 10, deltaM, 0],
  {{MB, 0}, {alpha, 0}, {beta, 0}, {deltaM, 0}}, {z, xx1, col, logMst2}, Weights -> sigma2]
wmfit["BestFit"]
wmfit["BestFitParameters"]
wmfit["ParameterConfidenceIntervals"]

```

```

FittedModel[-0.0838451 - 0.541213 col + 0.0182745 xx1 + dm[dL[z, 0.315, 0.685, 67.3]] + If[logMst2 >= 10, 0.0185514, 0]

```

```

-0.0838451 - 0.541213 col + 0.0182745 xx1 + dm[dL[z, 0.315, 0.685, 67.3]] + If[logMst2 >= 10, 0.0185514, 0]

```

```

{MB -> -0.0838451, alpha -> -0.0182745, beta -> -0.541213, deltaM -> 0.0185514}

```

```

{{{-0.101805, -0.0658857}, {-0.0301426, -0.00640634}, {-0.676116, -0.40631}, {-0.00492308, 0.0420258}}

```

```

-0.0838451 - 0.541213 col + 0.0182745 xx1 + dm[dL[z, 0.315, 0.685, 67.3]] + If[logMst2 >= 10, 0.0185514, 0]

```

```

{MB -> -0.0838451, alpha -> -0.0182745, beta -> -0.541213, deltaM -> 0.0185514}

```

```

{{{-0.101805, -0.0658857}, {-0.0301426, -0.00640634}, {-0.676116, -0.40631}, {-0.00492308, 0.0420258}}

```

```

χ2sum = Block[{sss = 0.},
  Δμ =
  Table[dm[dL[zs[[i]], 0.315, 0.685, H0opt]] - (μ0[[i]] - MB + 19 + alpha * X1[[i]] - beta * Col[[i]] - If[logMst[[i]] ≥ 10, deltaM, 0]),
  {i, 1, Nstars}];
  sss = 0.;
  Do[sss += Expand[Cinv[[i, j]] * Δμ[[i]] * Δμ[[j]] + If[i > j, 2, 1]], {i, 1, Nstars}, {j, 1, i}];
  Expand[sss]]
2973.01 - 8377.04 alpha - 32901.6 alpha^2 - 1217.9 beta - 123.482 alpha beta - 234.234 beta^2 - 18.3592 deltaM -
4134.73 alpha deltaM - 5.12107 beta deltaM + 2696.13 deltaM^2 + 1216.22 MB - 822.961 alpha MB - 131.027 beta MB + 1678.87 deltaM MB - 2333.8 MB^2

parms = FindMinimum[χ2sum, {{MB, 0}, {alpha, 0}, {beta, 0}, {deltaM, 0}}]
minvalue = parms[[1]]
parmsrules = parms[[2]] (* -MB + 19 *)
{827.102, {MB → -0.153253, alpha → 0.123226, beta → 2.52395, deltaM → -0.0409717}}

827.102

{MB → -0.153253, alpha → 0.123226, beta → 2.52395, deltaM → -0.0409717}

q2deg4 = Quantile[ChiSquareDistribution[4], 0.95]
9.48773

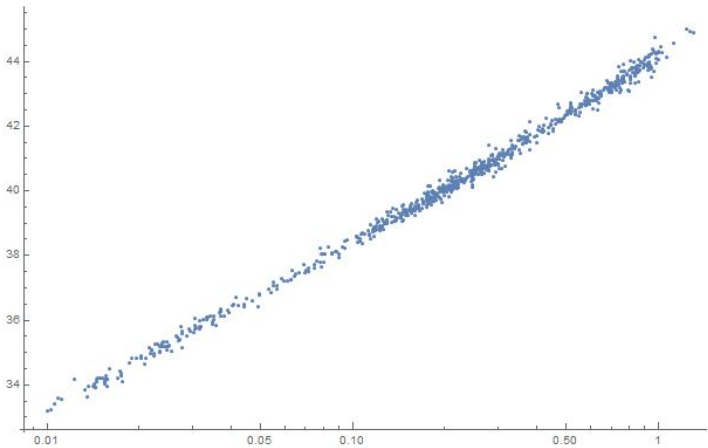
D[χ2sum, MB] /. parmsrules
-5.50279 × 10-6

-MB + 19 /. parmsrules
PlusMinus[Sqrt[2 * q2deg4 / (D[χ2sum, {MB, 2}] /. parmsrules)]]
19.1533

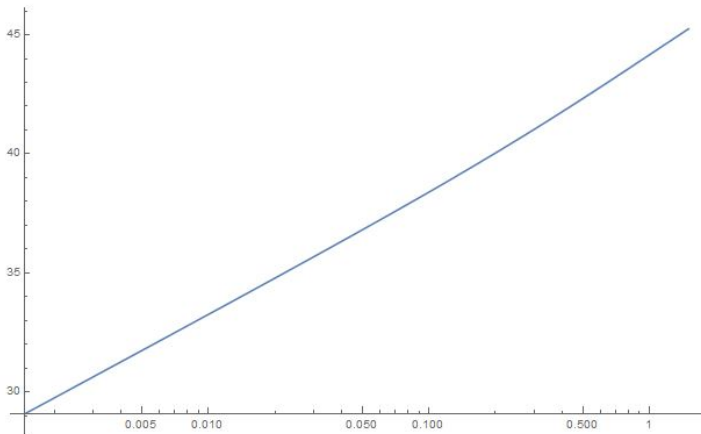
± 0.0637602

```

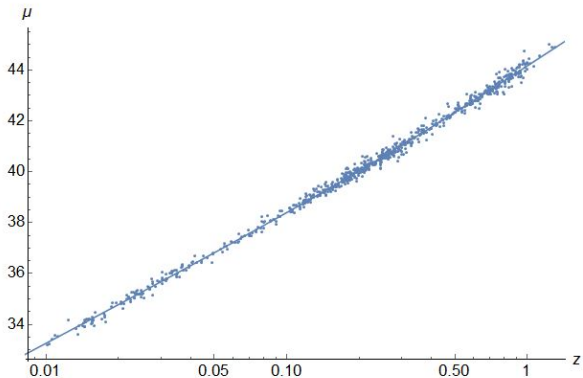
```
hub1 = ListLogLinearPlot[Transpose[{zs,  $\mu_1$ }], ImageSize -> {600, 570}, PlotRange -> All]
```



```
hub2 = LogLinearPlot[dm[dL[z, 0.315, 0.685, 67.3]], {z, 0, 1.5}, ImageSize -> {600, 570}]
```



```
hub = Show[hub1, hub2, AxesLabel -> {z,  $\mu$ }, AxesStyle -> Directive[Black, Style, 17], ImageSize -> {600, 570}]
```



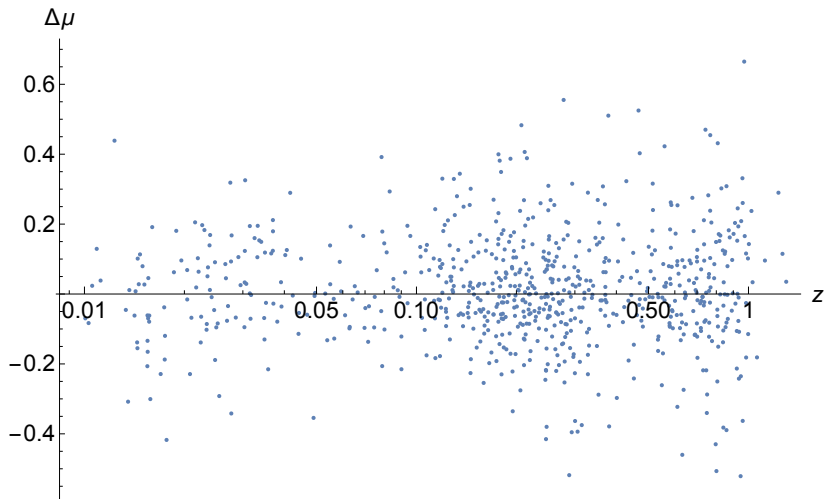


Рис. 6: Разностная диаграмма Хаббла.

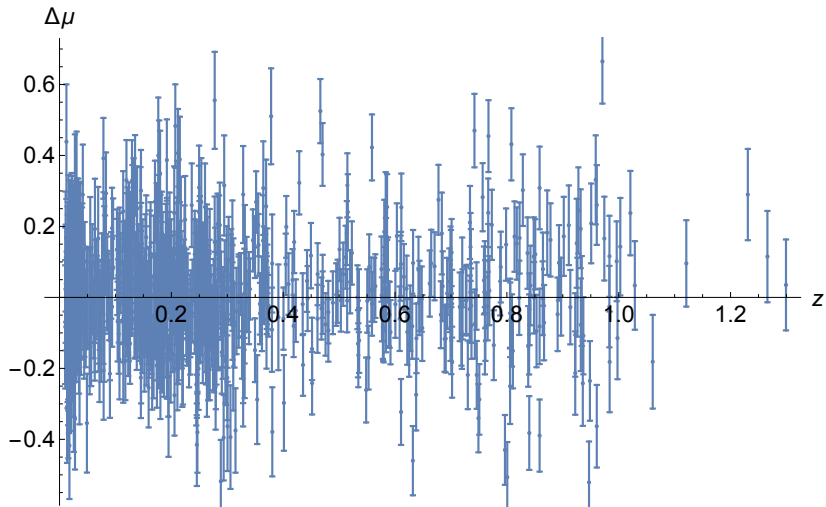


Рис. 7: The “difference” Hubble diagram with errors.

```

HubDeltaErr =
  ErrorListPlot[
    Table[{{zs[[i]],  $\mu_1[[i]] - dm[dL[zs[[i]], 0.315, 0.685, 67.3]]$ }, ErrorBar[errmu0[[i]]]},
      таблица значений
    {i, 1, Nstars}], AxesLabel → {z, " $\Delta\mu$ "}, AxesStyle → Directive[Black, Style, 17],
      обозначения на осях стиль осей директива чёрный стиль
    ImageSize → {600, 570}, PlotRange → All]
    размер изображения отображае... всё
  Export["HubDeltaErr_new.eps", HubDeltaErr]
    экспортировать

```

```

dmΩmΩΛfχ2b[Ωm_, ΩΛ_] := Block[{sss = 0.},
  Δμ = Table[(dm[dL[zs[[i]], Ωm, ΩΛ, H0opt]] + mscr - μ1[[i]]), {i, 1, Nstars}];
  sss = 0.;
  Do[sss += Expand[Cinv[[i, j]] * Δμ[[i]] * Δμ[[j]] * If[i > j, 2, 1]], {i, 1, Nstars}, {j, 1, i}];
  FindMinimum[sss, {mscr}][[1]] ]

Timing[dmΩmΩΛfχ2b[0.3, 0.7]]
{13.8594, 828.569}

```

```
MyTable[x_, y_, f_] := {x, y, f[x, y]}
```

```
dmOmegaLambda2 = Table[MyTable[j / 20, k / 20, dmOmegaLambda2], {j, 0, 0.8 + 20}, {k, 0, 20}]
```

```
{ { { 0, 0, 846.683 }, { 0, 1/20, 840.211 }, { 0, 1/10, 835.061 }, { 0, 3/20, 831.334 }, { 0, 1/5, 827.98 }, { 0, 2/10, 826.202 }, { 0, 7/20, 832.992 }, { 0, 2/5, 838.254 }, { 0, 9/20, 845.799 }, { 0, 1/2, 855.836 }, { 0, 11/20, 865.123 }, { 0, 3/5, 876.811 }, { 0, 7/10, 926.233 }, { 0, 3/4, 953.117 }, { 0, 4/5, 984.624 }, { 0, 17/20, 1021.37 }, { 0, 9/10, 1058.043 }, { 1/20, 0, 854.935 }, { 1/20, 1/20, 846.967 }, { 1/20, 1/10, 840.211 }, { 1/20, 3/20, 834.754 }, { 1/20, 7/20, 827.98 }, { 1/20, 2/5, 830.663 }, { 1/20, 9/20, 835.392 }, { 1/20, 1/2, 842.343 }, { 1/20, 3/5, 850.117 }, { 1/20, 7/10, 896.811 }, { 1/20, 3/4, 918.492 }, { 1/20, 4/5, 944.119 }, { 1/20, 17/20, 974.16 }, { 1/20, 9/10, 1010.836 }, { 1/10, 0, 865.123 }, { 1/10, 1/20, 855.794 }, { 1/10, 1/10, 847.579 }, { 1/10, 3/20, 840.555 }, { 1/10, 7/20, 826.202 }, { 1/10, 2/5, 826.586 }, { 1/10, 9/20, 828.816 }, { 1/10, 1/2, 833.043 }, { 1/10, 3/5, 840.211 }, { 1/10, 7/10, 896.811 }, { 1/10, 9/10, 926.233 }, { 1/5, 0, 876.811 }, { 1/5, 1/20, 865.123 }, { 1/5, 1/10, 855.836 }, { 1/5, 3/20, 847.579 }, { 1/5, 2/10, 840.211 }, { 1/5, 7/20, 832.992 }, { 1/5, 4/10, 830.663 }, { 1/5, 9/20, 835.392 }, { 1/5, 1/2, 842.343 }, { 1/5, 3/5, 850.117 }, { 1/5, 7/10, 896.811 }, { 1/5, 8/10, 918.492 }, { 1/5, 9/10, 944.119 }, { 1/5, 1, 974.16 }, { 2/5, 0, 926.233 }, { 2/5, 1/20, 918.492 }, { 2/5, 1/10, 910.747 }, { 2/5, 3/20, 902.503 }, { 2/5, 2/10, 896.811 }, { 2/5, 7/20, 889.066 }, { 2/5, 4/10, 884.211 }, { 2/5, 9/20, 880.466 }, { 2/5, 1/2, 876.811 }, { 2/5, 3/5, 873.166 }, { 2/5, 7/10, 870.421 }, { 2/5, 8/10, 866.676 }, { 2/5, 9/10, 863.021 }, { 3/5, 0, 953.117 }, { 3/5, 1/20, 945.372 }, { 3/5, 1/10, 937.627 }, { 3/5, 3/20, 931.633 }, { 3/5, 2/10, 926.233 }, { 3/5, 7/20, 921.833 }, { 3/5, 4/10, 917.433 }, { 3/5, 9/20, 913.033 }, { 3/5, 1/2, 908.633 }, { 3/5, 3/5, 904.233 }, { 3/5, 7/10, 900.833 }, { 3/5, 8/10, 897.433 }, { 3/5, 9/10, 894.033 }, { 4/5, 0, 984.624 }, { 4/5, 1/20, 976.879 }, { 4/5, 1/10, 969.134 }, { 4/5, 3/20, 963.140 }, { 4/5, 2/10, 957.740 }, { 4/5, 7/20, 953.340 }, { 4/5, 4/10, 948.940 }, { 4/5, 9/20, 944.540 }, { 4/5, 1/2, 940.140 }, { 4/5, 3/5, 935.740 }, { 4/5, 7/10, 931.340 }, { 4/5, 8/10, 926.940 }, { 4/5, 9/10, 922.540 }, { 5/5, 0, 1021.37 }, { 5/5, 1/20, 1013.625 }, { 5/5, 1/10, 1005.880 }, { 5/5, 3/20, 1000.886 }, { 5/5, 2/10, 995.486 }, { 5/5, 7/20, 991.086 }, { 5/5, 4/10, 986.686 }, { 5/5, 9/20, 982.286 }, { 5/5, 1/2, 977.886 }, { 5/5, 3/5, 973.486 }, { 5/5, 7/10, 969.086 }, { 5/5, 8/10, 964.686 }, { 5/5, 9/10, 960.286 } }
```

```
dmOmOmegaLambda2 = Interpolation[Flatten[dmOmOmegaLambda2, 1] ]
```

```
InterpolatingFunction[  
  Domain: {{0., 0.8}, {0., 1.}}  
  Output: scalar
```

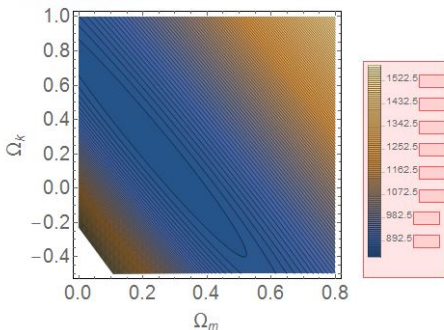
```
Save["C:\\Maxima\\cosm_acceleration\\dmMatterLambda2.txt", dmOmOmegaLambda2]
```

```
dmOmOmegaLambda2[0.3, 0.7]
```

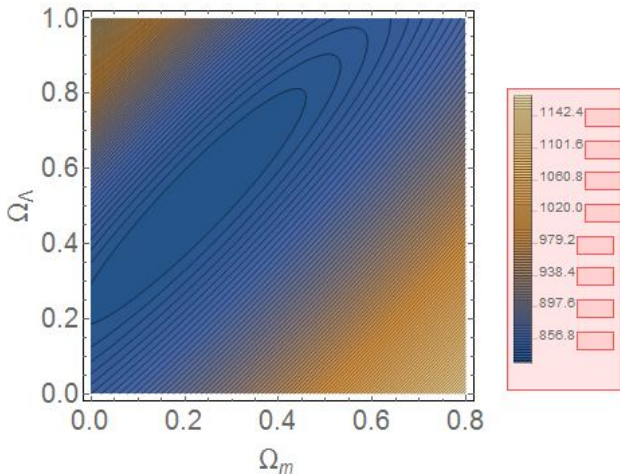
```
828.781
```

```
Chi2Plot = ContourPlot[dmOmOmegaLambda2[Om, 1 - Om - Omega], {Om, 0, 0.8}, {Omega, -1/2, 1}, FrameLabel -> {"Om", "Omega"},  
  Contours -> 100, AxesLabel -> {Om, Omega}, FrameStyle -> Directive[Style, 20]]
```

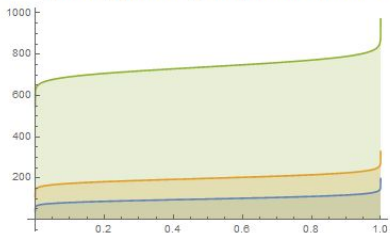
InterpolatingFunction: Input value {0.0000571429, 1.49984} lies outside the range of data in the interpolating function. Extrapolation will be used.



```
Chi2Plot = ContourPlot[dm $\Omega_m\Omega_\Lambda$ fint $\chi^2$ [ $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ ], { $\Omega_m$ , 0, 0.8}, { $\Omega_\Lambda$ , 0, 1}, Frame  
Contours  $\rightarrow$  100, AxesLabel  $\rightarrow$  { $\Omega_m$ ,  $\Omega_\Lambda$ }, FrameStyle  $\rightarrow$  Directive[Style, 20]]
```



```
Plot[Table[Quantile[ChiSquareDistribution[v], q], {v, {100, 200, 740}}] // Evaluate, {q, 0, 1},
```



```
q1σ = Quantile[ChiSquareDistribution[2], 0.68]
```

```
q2σ = Quantile[ChiSquareDistribution[2], 0.95]
```

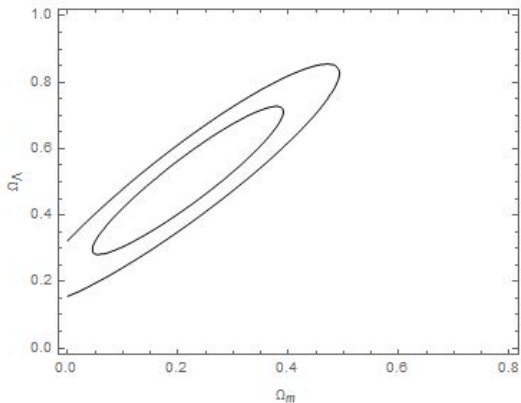
```
q3σ = Quantile[ChiSquareDistribution[2], 0.998]
```

```
2.27887
```

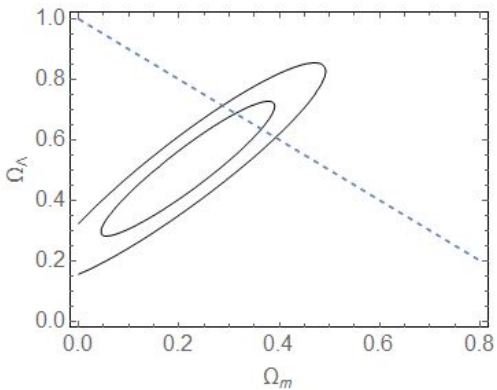
```
5.99146
```

```
12.4292
```

```
cp = ContourPlot[dmΩmΩΛfintχ2[Ωm, ΩΛ], {Ωm, 0, 0.8}, {ΩΛ, 0, 1}, FrameL:
Contours → {χ2min[[1]] + q1σ, χ2min[[1]] + q2σ (*,χ2min[[1]] + q3σ*)}
```



```
MatterLambdaPlot = Show[cp, Plot[1 -  $\Omega_m$ , { $\Omega_m$ , 0, 0.8}, PlotStyle -> Dashed],
```





Проблемы современной космологии

- Материя из энергии. Но частицы рождаются парами частица–античастица. Почему вещество доминирует, а антивещества практически нет? Это нарушение закона сохранения барионного числа.
- Слишком много энергии надо, чтобы сначала получить частицы парами, а затем сохранить только ΔM .
- Неизвестно:
 - ▶ Природа темной материи и темной энергии.
 - ▶ Причина расхождений в измерении постоянной Хаббла, $H_0 = 67.4 \dots 73 \frac{\text{км/с}}{\text{Мпс}}$.
 - ▶ Причина аномалий в СМВ.
 - ▶ Причины возникновения аномалий в крупномасштабной структуре.
 - ▶ Причины возникновения «ранних галактик».


Большой взрыв — это *фазовый переход* вещества при очень большой энергии (т.е. материя произошла из материи, которая была на предыдущем цикле). Это позволяет объяснить, почему во Вселенной почти нет античастиц, а также наблюдаемую однородность Вселенной.

Физически также возможен обмен пространственных координат с координатами на группах Ли $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$, используемых в стандартной модели физики элементарных частиц [5, 6, 7].

 E.W. Kolb and M.S. Turner.
The early Universe.
Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990.

 M. Betoule, R. Kessler, J. Guy, J. Mosher, D. Hardin, R. Biswas,
P. Astier, P. El-Hage, M. Konig, S. Kuhlmann, et al.
Improved cosmological constraints from a joint analysis of the
SDSS-II and SNLS supernova samples.
Astronomy & Astrophysics, 568:A22, Aug 2014.

 R. Lupton.
Statistics in theory and practice.
Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993.

 С.В. Малов.
*Регрессионный анализ: теоретические основы и практические
рекомендации.*
СПб.: Изд. СПбГУ, 2013.



В.А. Рубаков.

Актуальные вопросы космологии.

М.: Издательский дом МЭИ, 2015.



В.Р. Крым.

Космология с биинвариантной метрикой на главном расслоении с неабелевой группой Ли $SU(2)$.

Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия, (4):??–??, 2025.



В.Р. Крым.

Топологическое квантование электрического заряда в теории Калуцы—Клейна.

Записки Научн. Сем. ПОМИ РАН, ??:??–??, 2025.